

MÉTODOS ITERATIVOS MATRICIAIS

Luciana da Silva Azevedo ¹

Rubén Panta Pazos ²

Resumo: Neste trabalho apresentamos os métodos iterativos matriciais sob o ponto de vista do ensino na engenharia. Os métodos matriciais diretos ou iterativos tentam resolver os sistemas lineares, que surgem em diversas áreas da engenharia e da ciência. Primeiro se apresentam os métodos estacionários e fazemos uma referência aos métodos iterativos não estacionários. A análise da convergência dos métodos estacionários é dada estabelecendo uma comparação entre alguns deles.

Palavras-chave: *Métodos iterativos, Convergência, Análise qualitativa.*

1. INTRODUÇÃO

O estudo dos métodos iterativos matriciais para resolver os sistemas lineares tem sido estimulado pelo avanço tecnológico durante o século XX. Na verdade, o objetivo de resolver:

$$Ax = b \tag{1}$$

onde x é um vetor coluna de n elementos, A uma matriz quadrada de ordem n , e b um vetor também de n elementos foi tratado por diversos matemáticos, entre os quais salientamos Gabriel Cramer (1704-1752) e Carl Friedrich Gauss (1777-1855). O primeiro formula uma solução mediante determinantes e Gauss trabalha desde um ponto de vista abstrato na busca de um enfoque direto para resolver os sistemas lineares. Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) parte de um ponto de vista diferente, criando uma seqüência a partir de um valor relativamente aproximado da solução; a seqüência se aproxima à solução de (1), caso verifique determinadas condições. O matemático Philipp Ludwig von Seidel (1821-1896) culmina esta etapa inicial ao apresentar seu método iterativo para resolver sistemas lineares. Este trabalho foi organizado da forma seguinte. Na seção 2 se fornece um relatório dos principais métodos iterativos, basicamente os estacionários. Na seção 3 comparamos com resultados numéricos gerados por um sistema de computação algébrica alguns dos principais métodos, incluindo a análise dos resíduos. Finalmente formulamos algumas conclusões.

¹ azeluciana@yahoo.com.br, UNISC, Departamento de Matemática, sala 1314, Av. Independência 2293, CEP 96815-900, Santa Cruz do Sul, RS.

² rpazos@unisc.br, UNISC, Departamento de Matemática, sala 1301, Av. Independência 2293, CEP 96815 - 900, Santa Cruz do Sul, RS.

2. MÉTODOS ITERATIVOS MATRICIAIS

Mediante uma ilustração vamos a considerar os principais métodos iterativos básicos. O problema é resolver o sistema linear.

$$\begin{aligned} 2x + 0.8y - 0.6z &= 1 \\ 0.8x + y + 0.1z &= -1, \\ -0.6x + 0.1y + 4z &= 1 \end{aligned} \quad (2)$$

Na primeira equação de (2) podemos isolar x , na segunda equação isolamos y , e na terceira isolamos z , obtendo desta forma :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(1 - 0.8y + 0.6z) \\ y &= -1 - 0.8x - 0.1z, \text{ ou} \\ z &= \frac{1}{4}(1 + 0.6x - 0.1y) \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 & 0.3 \\ -0.8 & 0 & -0.1 \\ 0.15 & -0.025 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \\ 0.25 \end{bmatrix} \quad (3)$$

quando empregamos a forma matricial. A equação (3) permite considerar a fórmula iterativa

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & -0.8 & 0.6 \\ -0.8 & 0 & -0.1 \\ 0.6 & -0.1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \quad k \in N. \quad (4)$$

que permite determinar uma seqüência de pontos no espaço que se aproxima à solução do sistema linear (2).

2.1 Método de Jacobi (aproximações simultâneas)

Reescrevendo a fórmula (4) em forma explícita, MARON et al (1991):

$$X_{k+1} = D^{-1}(JX_k + b), \quad k \in N, \quad (5), \quad \text{onde } D \text{ é a matriz diagonal } (2,1,4),$$

isto é os elementos da diagonal da matriz do sistema, J é a matriz $\begin{bmatrix} 0 & -0.8 & 0.6 \\ -0.8 & 0 & -0.1 \\ 0.6 & -0.1 & 0 \end{bmatrix}$,

$b = [1 \ -1 \ 1]^T$ é o vetor da direita de (2) e X representa o vetor incógnita.

A fórmula (5) determina as iterações de Jacobi. Calculemos as duas primeiras iterações, iniciando com $X_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$,
 $X_1 = [0.5 \ -1 \ 0.25]$, e
 $X_2 = [0.975 \ -1.425 \ 0.35]$. A seguinte tabela nos oferece as primeiras 10 iterações:

Tabela 1: Iterações mediante o método de Jacobi.

k	x_k	y_k	z_k
0	0	0	0
1	0.5	-1	0.25
2	0.975	-1.425	0.35
3	1.175	-1.815	0.431875
4	1.355563	-1.983188	0.471625
5	1.434763	-2.131613	0.502914
6	1.503519	-2.198101	0.518505
7	1.534792	-2.254666	0.53048
8	1.56101	-2.280882	0.536585
9	1.573328	-2.302467	0.541174
10	1.583339	-2.31278	0.543561

A seqüência do método de Jacobi se aproxima à solução $\approx [1.597502, -2.332796, 0.547945]$, só que este resultado aproximado com seis casas é obtido após 32 iterações.

No método de Jacobi a matriz A é decomposta numa diferença de duas matrizes,

$$\begin{aligned} A &= D - J \\ \Rightarrow (D - J)X &= b, \text{ reescrevendo sistema (1)} \\ \Rightarrow DX &= JX + b, \text{ transpondo para esquerda} \\ \Rightarrow X &= D^{-1}(JX + b) \end{aligned} \quad (6)$$

daí resulta a fórmula iterativa matricial (5). Observe-se que J é a soma de duas matrizes triangulares, uma estritamente inferior e outra estritamente superior. O método de Jacobi resolve cada variável localmente em relação às outras variáveis: uma iteração do método serve para resolver cada variável só uma vez. A convergência é lenta.

2.2 Método de Gauss-Seidel (aproximações sucessivas)

Se depois de calcular x_{k+1} na fórmula (4), aproveitamos este valor para o cálculo de y_{k+1} , e imediatamente empregamos estes valores no cálculo de z_{k+1} , obteremos um método que atualiza os valores das iterações.

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ \frac{17}{200} & -\frac{1}{40} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & -0.8 & 0.6 \\ 0 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \quad k \in N. \quad (7)$$

Reescrevendo a fórmula (7) em forma explícita: $X_{k+1} = F^{-1}(UX_k + b)$, $k \in N$. (8)

com $F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0 \\ -0.6 & 0.1 & 4 \end{bmatrix}$, U é a matriz estritamente triangular superior $\begin{bmatrix} 0 & -0.8 & 0.6 \\ 0 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, e

b e X são os vetores independente e das incógnitas, respectivamente.

A fórmula (5) determina as iterações de Gauss-Seidel. Calculemos as duas primeiras iterações, iniciando com $X_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$, $X_1 = [0.5 \ -1.4 \ 0.36]$, e $X_2 = [1.168 \ -1.9704 \ 0.47446]$. A seguinte tabela nos oferece as primeiras 10 iterações:

k	x_k	y_k	z_k
0	0	0	0
1	0.5	-1.4	0.36
2	1.168	-1.9704	0.47446
3	1.430498	-2.191844	0.519371
4	1.532549	-2.277976	0.536832
5	1.57224	-2.311475	0.543623
6	1.587677	-2.324504	0.546264
7	1.593681	-2.329571	0.547291
8	1.596016	-2.331542	0.547691
9	1.596924	-2.332308	0.547846
10	1.597277	-2.332606	0.547907

Tabela 2: Iterações mediante o método de Gauss-Seidel.

A seqüência do método de Jacobi se aproxima à solução, e precisamos 17 iterações para obter uma aproximação com 6 casas decimais, mais rápido que com o método de Jacobi. A decomposição matricial no método de Gauss-Seidel é $A = F - S$.

2.3 Método de Sobre-Relaxação Sucessiva (método SOR)

Este método é considerado como uma extrapolação realizada no método de Gauss-Seidel. Tal extrapolação assume a forma de uma média ponderada entre a iteração prévia e a iteração de Gauss-Seidel calculada para cada componente, isto é

$$X_{k+1} = \omega X_{k+1}^{Seidel} + (1 - \omega)X_k, \quad k \in N, \quad (9)$$

onde o vetor X_k^{Seidel} representa a iteração de Gauss-Seidel e ω é o fator de interpolação. A idéia básica é escolher um valor para ω que acelere a convergência das iterações à solução. Na forma matricial escrevemos

$$X_{k+1} = (D - \omega L)^{-1}((\omega U + (1 - \omega)D)X_k + \omega b), \quad k \in N, \quad (10)$$

sendo $L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.8 & 0 & 0 \\ 0.6 & -0.1 & 0 \end{bmatrix}$ uma matriz estritamente triangular inferior, e as outras matrizes

D e U são já conhecidas. Se $\omega = 1$, o método SOR se reduz ao método de Gauss-Seidel. A fórmula (10) expressa a fórmula iterativa do método de sobre-relaxação sucessiva. Calculemos as duas primeiras iterações, iniciando com $X_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$, $X_1 = [0.560829 \ -1.624905 \ 0.420338]$, e $X_2 = [1.363067 \ -2.194248 \ 0.520143]$.

A seguinte tabela nos oferece as primeiras 10 iterações:

k	x_k	y_k	z_k
0	0	0	0
1	0.560829	-1.624905	0.420338
2	1.363077	-2.194248	0.520143
3	1.554505	-2.307951	0.543397
4	1.590055	-2.328626	0.547129
5	1.596262	-2.3321	0.547816
6	1.597297	-2.332682	0.547923
7	1.597469	-2.332777	0.547942
8	1.597497	-2.332793	0.547945
9	1.597501	-2.332796	0.547945
10	1.597502	-2.332796	0.547945

Tabela 3: Iterações mediante o método de Sobre-Relaxação Sucessiva.

Obtemos o mesmo resultado com apenas 10 iterações, o que mostra a convergência rápida. Kahn (1958) tem mostrado que o método não converge se ω está fora do intervalo

(0,2). Para a **tabela 3** escolhemos o valor $\omega = 1.121658$, que otimiza a convergência segundo veremos depois.

2.4 Métodos estacionários e não estacionários

Os métodos iterativos matriciais que podem expressar-se na forma

$$X_{k+1} = MX_k + c, \quad k \in N. \quad (11)$$

(onde M e c não dependem de k) são chamados *métodos iterativos estacionários*, ARAÚJO (1997). Os três métodos anteriores pertencem a essa família. De outro lado, os *métodos iterativos não estacionários* diferem pelo fato que os cálculos envolvem informação que muda em cada iteração. No que segue apresentamos o método do Gradiente Conjugado.

2.5 Método do Gradiente Conjugado

Analisaremos o problema quadrático

$$\min \left\{ \frac{1}{2} (X^T A X) - b^T X \right\}, \quad (12)$$

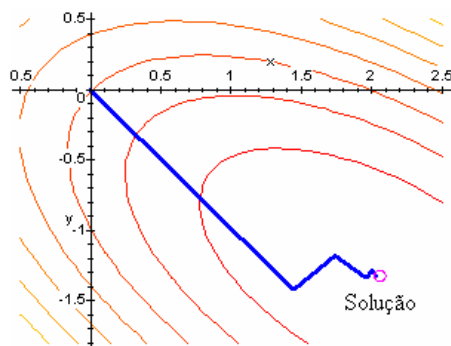
onde A é uma matriz quadrada definida positiva de ordem n . Resolver o problema da equação (12) equivale a resolver o sistema linear da equação (1). Como A é definida positiva, então para todo vetor U_k , $U_k^T A U_k > 0$. O método de gradiente conjugado consiste em obter um vetor de direção $G_k = A U_k - b$, para cada vetor U_k obtido na etapa anterior, e calcular o novo vetor mediante a fórmula

$$U_{k+1} = U_k - \lambda_k G_k, \quad k \in N, \quad (13)$$

com o coeficiente $\lambda_k = \frac{G_k^T G_k}{G_k^T A G_k}$. O que acontece é que G_k é o gradiente da função objetivo

$f(X) = \frac{1}{2} (X^T A X) - b^T X$, isto é G_k aponta na direção do máximo crescimento da função, assim o método procura em cada ponto caminhar na direção oposta.

Figura 1: Enfoque gráfico do método do Gradiente Conjugado



Reproduzimos na seguinte tabela os resultados obtidos para o problema da equação (2).

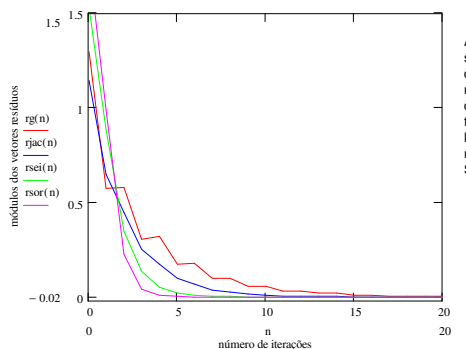
Tabela 4 : Iterações mediante o método do Gradiente Conjugado.

k	x_k	y_k	z_k
0	0	0	0
1	0.75	-0.75	0.75
2	0.923051	-1.04104	0.285909
3	1.024109	-1.504581	0.614286
4	1.192898	-1.625736	0.391318
5	1.28736	-1.857947	0.589003
6	1.372833	-1.932391	0.460715
7	1.42123	-2.06617	0.570591
8	1.470519	-2.10741	0.498669
9	1.498348	-2.18244	0.560762
10	1.525991	-2.205762	0.520192

Neste caso, para obter um resultado com a aproximação de 6 casas decimais precisamos de 53 iterações.

3. ESBOÇO DA CONVERGÊNCIA DOS MÉTODOS ITERATIVOS

Os métodos estacionários convergem se a matriz do sistema é diagonal dominante, isto é quando $|a_{ii}| \geq \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}|$, para $i = 1, \dots, n$, ou $|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$, para $j = 1, \dots, n$. Para o método do gradiente conjugado só precisamos que a matriz seja definida positiva. Como já sabemos, a matriz sob consideração do sistema da equação (2) satisfaz estes requerimentos. Visando comparar a convergência dos métodos, definimos a função $res(k)$ como o valor absoluto do resíduo n -ésimo.

Figura 2 : Gráfico dos resíduos dos quatro métodos considerados.

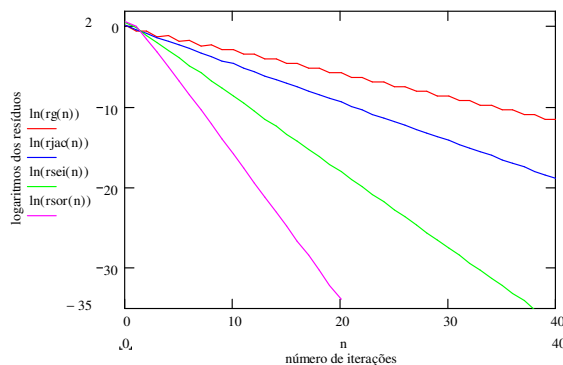
Conforme se observa, a partir das primeiras iterações o método de sobre-relaxação sucessiva converge mais rapidamente à solução exata. Para melhor visualização consideramos seus

logaritmos naturais, isto é
$$res(k) = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2 + (z_{k+1} - z_k)^2}, \quad (14)$$

$$\ln(res(k))$$

com $k = 1, \dots, n$, para cada seqüência de iterações do correspondente método. A figura 3 dá uma idéia clara.

Figura 3 : Logaritmos naturais dos resíduos dos quatro métodos iterativos.



A declividade da reta dos logaritmos naturais dos resíduos no método de sobre-relaxação sucessiva é maior (mais negativa), seguida pelas declividades das retas dos logaritmos naturais dos resíduos no método de Gauss-Seidel e no método de Jacobi, nessa ordem. A determinação da declividade destas retas é uma tarefa acessível ao estudante de engenharia, o que permite envolver-se com um primeiro passo no estudo da convergência de métodos iterativos. Uma palavra apenas sobre o valor ótimo do parâmetro empregado no método de sobre-relaxação sucessiva, conforme NAKAMURA (1992), WOOD (1999). Se denotamos com ρ o raio espectral da matriz de iteração de Jacobi, ou seja $\rho = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ (o valor máximo dos autovalores da matriz $D^{-1}J$, supondo que todos são reais), então

$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2}}$; (15), se $\rho > 1$, então ω_{opt} será complexa. No caso do sistema linear

da equação (2), os autovalores da matriz de iteração de Jacobi resultaram $\lambda_1 = 0.621928$, $\lambda_2 = -0.58918$, $\lambda_3 = -0.032749$, e assim $\rho = 0.621928$; conseqüentemente $\omega_{opt} = 1.121658$. Finalmente devemos salientar que as considerações sobre convergência de um método iterativo nem sempre são dado com um enfoque orgânico e mais aprofundado.

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os métodos iterativos matriciais são muito empregados na solução numérica de equações diferenciais e integro-diferenciais em várias áreas da ciência e da engenharia. A introdução destes métodos representa um esforço na disciplina de Cálculo Numérico oferecida aos alunos de graduação da engenharia, especialmente para aqueles que são candidatos a usar métodos numéricos para resolver sistemas lineares de grande porte. Além disso, o cabal conhecimento dos métodos iterativos lineares é um bom degrau para depois apreender métodos iterativos de sistemas de equações não lineares multidimensionais, pois representa um requisito básico,

conforme indica ORTEGA atua (2000). De fato alguns dos métodos se generalizam quando desejamos resolver sistemas de equações não lineares. De outra parte, resulta importante apresentar um bom exemplo antes preencher de fórmulas. O uso de um sistema de computação algébrica é uma ferramenta indispensável na disciplina, melhor que o uso da calculadora, pois o aluno pode introduzir-se às noções básicas de programação. Neste trabalho empregamos Mathcad, e nas aulas foi utilizado Maple.

Em relação à convergência apenas foram apresentadas algumas idéias por tratar-se de um evento de ensino na engenharia. O fato de estabelecer uma comparação da convergência de distintos métodos não só com definições precisas da estimativa de erro, mas também –após conhecer que as aproximações convergem sempre que fiquem verificadas certas hipóteses– manipular os resíduos das aproximações, permite familiarizar ao aluno com tópicos mais áridos, como o de convergência. Outro assunto que não foi abordado neste trabalho é da análise qualitativa dos métodos numéricos lineares. Para isso se define uma norma no conjunto de matrizes do sistema, e após estabelecer os diagramas das iterações, se observa à íntima relação das órbitas definidas como uma seqüência das iterações com a velocidade de convergência do método sob consideração.

AGRADECIMENTOS

O segundo autor deve expressar seu reconhecimento aos alunos das universidades URI, Santo Ângelo-RS , UNI em Lima-Peru e alunos da UNISC (Universidade de Santa Cruz do Sul), pela estreita colaboração quando ministramos a disciplina.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ARAÚJO, É, R.. *Métodos Iterativos em Álgebra Linear Computacional*. In: 2ª ESCOLA DE VERÃO EM COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA, Laboratório Nacional de Computação Científica , Petrópolis-RJ, 1997.
2. BARNETT, S., *Matrices, Methods and Applications*, Clarendon Press, Oxford, 1994.
3. KAHAN, W., *Gauss-Seidel methods of solving large systems of linear equations*, PhD Thesis, University of Toronto, 1958.
4. MARON, M. J. and LOPEZ, R. J., *Numerical Analysis: A Practical Approach*, Wadsworth Publishing Company, Belmont, CA, USA, 1991.
5. NAKAMURA, S., *Métodos Numéricos Aplicados con Software*, Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 1992.
6. ORTEGA, J. M. And RHEINBOLDT, W. C., *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Classics in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, PA, USA, 2000.
7. WOOD, A, *Introduction to Numerical Analysis*, Addison-Wesley, Harlow, England, 1999.