

XI Conferência InterAmericana de Educação Matemática
13 a 17 de Julho, Blumenau, Santa Catarina, BRASIL

OTIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS USANDO UM SISTEMA DE COMPUTAÇÃO ALGÉBRICA

Rubén Panta Pazos

Faculdade de Matemática, PUCRS, Av Ipiranga 6681,
CEP 90619-900, Porto Alegre – RS – Brazil
e-mail : rpp@pucrs.br

RESUMO

Neste trabalho apresentamos a forma de desenvolvimento do ensino da otimização de funções de duas ou mais variáveis aos alunos de graduação de matemática e engenharia da PUCRS. Partimos da idéia fundamental que o enfoque geométrico e o auxílio do computador formam peças importantes da aprendizagem dos conceitos do cálculo diferencial e integral de uma ou mais variáveis. Além disso, no trabalho de sala de aula se usa com frequência o chamado método heurístico que permite a descoberta dos próprios alunos de alguns conceitos básicos. Com isso, o uso de um sistema de computação algébrica é parte da engrenagem no ensino do cálculo.

PALAVRAS-CHAVE

Sistema de computação algébrica, multiplicadores de Lagrange

1. INTRODUÇÃO

O ensino do cálculo diferencial e integral evolui com o tempo. Desde a descoberta de Newton e Leibnitz dos conceitos de derivada e integral, a forma da aprendizagem mudou nos mais de três séculos de existência. Algumas vezes o enfoque foi dedicado à intuição, devido a necessidades pragmáticas, outras a preferência voltou-se à fundamentação teórica dos conceitos envolvidos (noção formal do limite de uma função, integral de Riemann). Hoje com a explosão da informática estamos assistindo a uma mudança radical de nossas formas de comunicação e ensino nos diversos campos da matemática. Além do quadro e giz, sua voz e talento, o professor de matemática vai entrando no mundo da era tecnológica, se adequando mais e mais com as novas tecnologias, usando o Power Point, preparando textos e provas em

processadores de textos (Word, Látex), passando notas em folhas eletrônicas (Excel, Lótus) e usando programas matemáticos mais ou menos sofisticados (Maple, MathCad, Matemática, Derive, Cabri-Geomètre). O uso da Internet tem se constituído uma fonte de informação e comunicação significativa.

No ensino da otimização de funções de duas ou mais variáveis existem problemas de determinação de máximos e mínimos relativos, e também problemas de otimização com vínculos. Os problemas a ser considerados são os seguintes

$$\begin{cases} \min f(x, y) & \text{com } (x, y) \in D \\ f \in C^2(D) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \min f(x, y) & \text{com } (x, y) \in D \\ g(x, y) = 0 \\ f, g \in C^1(D) \end{cases} \quad (2)$$

O problema (1) se denomina problema de otimização sem restrições, D é um domínio do plano, onde a função $f(x,y)$ dita função objetivo, possui as derivadas de segunda ordem contínuas em D . O problema (2) se conhece como problema de otimização com um vínculo, e apenas vamos exigir que a função objetivo $f(x,y)$ e a função de restrição $g(x,y)$ possuam derivadas de primeira ordem contínuas em D .

Para ter uma idéia do desenvolvimento didático de nosso método integrado no ensino do cálculo dedicamos a segunda seção à metodologia empregada que envolve trabalho na sala de aula combinando o método expositivo e heurístico. Depois indicamos como se emprega o sistema de computação algébrica, de modo particular gerando uma folha de trabalho que é liberada ao aluno na Internet após cada aula de laboratório. Para isso tomaremos dois problemas elementares que servem de exemplos. Uma seção será dedicada ao caso de otimização com funções de três variáveis, de modo especial se tratando da busca do valor ótimo de uma função sujeita a dois vínculos. Finalmente damos algumas conclusões incluindo tropeços e sucessos do método.

2. METODOLOGIA

O desenvolvimento deste importante capítulo do cálculo diferencial em várias variáveis consiste em

- Aula introdutória expositiva;
- Laboratório (módulo com apresentação e uso de sistema de computação algébrica);
- Aula de exercícios.

O teor e o enfoque de cada parcela depende de diversos fatores, da composição da turma (se for homogênea com alunos só da matemática ou engenharia, ou se for heterogênea), do perfil acadêmico dos alunos, do tamanho da turma. Em termos gerais o trabalho em sala de aula abrange entre 50 a 65 % aproximadamente, no entanto o tempo no laboratório está entre 15 e 25 %, o mesmo tempo que o dedicado especificamente aos exercícios.

Na aula introdutória expositiva são dadas as definições para a formulação correta dos problemas de otimização com e sem vínculo. A definição de ponto crítico, a forma de determinar o conjunto de pontos críticos e como se classificam empregando o Hessiano ilustra o método para resolver problemas de otimização do tipo (1).

Na resolução do problema de otimização com vínculo são dados dois métodos, o chamado método direto que consiste em isolar uma variável na equação de restrição $g(x,y) = 0$, para substituir na função objetivo $f(x,y)$, mas sendo agora uma função de apenas uma variável e se segue o procedimento de cálculo de máximos e mínimos relativos de funções de uma variável. Depois se apresenta o método de multiplicadores de Lagrange mediante a construção da função

$$U(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) \quad (3)$$

cujos pontos críticos se determinam. Colocamos especial ênfase no enfoque geométrico do método de multiplicadores de Lagrange.

Finalmente se fornecem os elementos de problemas de otimização de funções com três variáveis com dois vínculos.

Na aula de exercícios se estudam problemas bem mais complexos entrando numa interatividade heurística com os alunos. Isto se expressa quando em problemas geométricos se solicita a identificação da figura cuja equação o professor escreve no quadro (“ a equação do quadro : $z = x^2 + y^2$ que superfície representa ? ”), ou no momento de iniciar um problema de otimização se solicita qual é o primeiro passo a ser dado na determinação de pontos críticos, ou melhor ainda quando dado um problema de otimização com um vínculo é demandado que os alunos estabeleçam a diferença entre a função objetivo e a função restrição.

3. USO DO SISTEMA DE COMPUTAÇÃO ALGÉBRICA

A seqüência inclui um problema de otimização sem restrições, e depois um problema de otimização com um vínculo. Em cada casa fornecemos o material dado em sala de aula e depois parte da folha de trabalho, neste caso em MapleV (¹).

EXEMPLO 1 (de otimização sem restrições).

Uma companhia fabrica dois itens que são vendidos em mercados separados. As quantidades q_1 e q_2 pedidas pelos consumidores e os preços p_1 e p_2 de cada item estão relacionadas por

$$p_1 = 600 - 0,3 q_1$$

$$p_2 = 500 - 0,2 q_2.$$

Se o preço de um item aumenta, sua demanda decresce. O custo total de produção da companhia é dado por

$$C = 16 + 1,2 q_1 + 1,5 q_2 + 0,2 q_1 q_2 .$$

Se a companhia quer maximizar seu lucro total, quanto de cada produto deve manufaturar ? Qual é o lucro máximo ? [2]



EM SALA DE AULA

A função lucro se define como a diferença entre a receita total e o custo total, isto é

$$\begin{aligned} L(q_1, q_2) &= R(q_1, q_2) - C(q_1, q_2) = p_1 q_1 + p_2 q_2 - (16 + 1,2 q_1 + 1,5 q_2 + 0,2 q_1 q_2) \\ &= (600 - 0,3 q_1) q_1 + (500 - 0,2 q_2) q_2 - (16 + 1,2 q_1 + 1,5 q_2 + 0,2 q_1 q_2) \\ &= -0,3 q_1^2 - 0,2 q_1 q_2 - 0,2 q_2^2 + 598,8 q_1 + 498,5 q_2 - 16 \end{aligned} \quad (4)$$

A quadrática anterior será a função objetiva. Calculamos as derivadas parciais de $L(q_1, q_2)$.:

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -0,6 q_1 - 0,2 q_2 + 598,8 \quad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -0,2 q_1 - 0,4 q_2 + 498,5 \quad (6)$$

Agora devemos resolver os sistema linear de duas equações com duas incógnitas:

$$\begin{cases} 0,6 q_1 + 0,2 q_2 = 598,8 \\ 0,2 q_1 + 0,4 q_2 = 498,5 \end{cases} \quad (7)$$

¹ O autor usou Derive e Maple V em duas turmas diferentes.

cuja solução é obtida facilmente : $q_1 = 699,1$ e $q_2 = 896,7$.

Após determinar o único ponto crítico se calcula o Hessiano :

$$H(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial q_1 \partial q_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial q_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,6 & -0,2 \\ -0,2 & -0,4 \end{bmatrix} \quad (8)$$

cujo determinante é a constante 0,2, isto é o ponto crítico é um máximo local, e o valor do lucro máximo é $L(699,1; 896,7) = \$ 432797,015$. Em sala de aula se indica que o gráfico da função lucro $L(q_1, q_2)$ é um parabolóide elíptico invertido.



NO LABORATORIO

Primeiro se introduzem comandos para o uso de arquivos utilitários, o de álgebra linear que vai permitir calcular o gradiente.

> **with(linalg):with(plots):**

Warning, new definition for norm

Warning, new definition for trace

> **C:=(x,y)->16+1.2*x+1.5*y+0.2*x*y:**

> **R:=(x,y)->(600-0.3*x)*x+(500-0.2*y)*y:**

> **L:=(x,y)->R(x,y)-C(x,y): expand(L(x,y)):**

$$598.8 x - .3 x^2 + 498.5 y - .2 y^2 - 16 - .2 x y$$

Foram introduzidas as funções custo total, receita total e lucro total baseadas na informação do problema. Agora calculamos o gradiente da função lucro total :

> **grad(L(x,y),[x,y]):**

$$[-.6*x+598.8-.2*y, -.4*y+498.5-.2*x]$$

> **convert(%,set):**

$$\{-.6*x+598.8-.2*y, -.4*y+498.5-.2*x\}$$

Se resolve o sistema linear de duas equações com duas incógnitas :

> **solve(%,{x,y}):**

$$\{y = 896.7000000, x = 699.1000000\}$$

> **L(699.1,896.7):**

$$432797.015$$

Para verificar que se trata de um valor mínimo local empregamos o hessiano

```
> hessian(L(x,y),[x,y]);
```

$$\begin{bmatrix} -.6 & -.2 \\ -.2 & -.4 \end{bmatrix}$$

cujo determinante resulta positivo

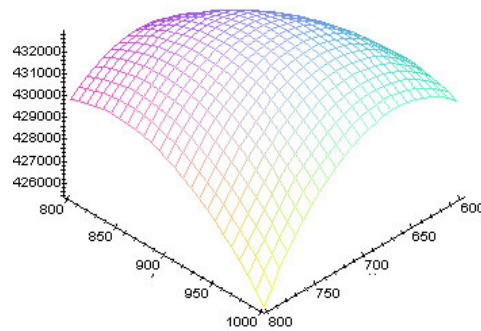
```
> det(%);
```

.20

Para o gráfico da função lucro escrevemos

```
> plot3d(L(x,y),x=600..800,y=800..1000,axes=framed,title=`Gráfico de Lucro Total`);
```

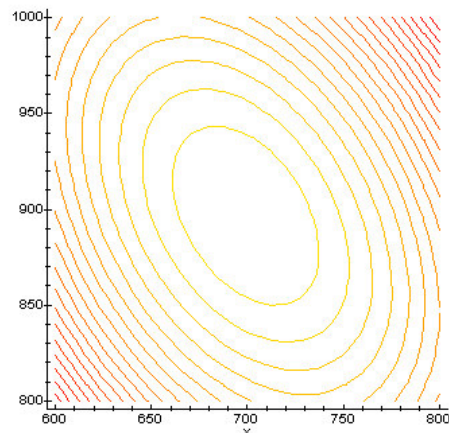
Gráfico de Lucro Total



O diagrama de curvas de nível da função é obtido como segue

```
> contourplot(L(x,y),x=600..800,y=800..1000,contours=20,title=`Curvas de Nível` );
```

Curvas de Nível



EXEMPLO 2 (de otimização com vínculo).

Suponha que queremos maximizar a produção de uma firma com uma restrição orçamentária. A produção $f(x,y)$ é uma função que depende de duas variáveis, x e y , que são as quantidades de duas matérias primas

$$f(x,y) = x^{2/3} y^{1/3}$$

Se x e y são comprados aos preços $p_1 = \$ 10$ e $p_2 = \$ 15$ por milhares, qual é a produção máxima que pode ser obtida com um orçamento de 90 mil ? [2]



EM SALA DE AULA

O problema a ser resolvido é

$$\begin{cases} \max(x^{2/3} y^{1/3}) \\ 10x + 15y \leq 90 \end{cases} \quad (9)$$

Método Direto

Se isola a variável y na equação de restrição, obtendo $y = 6 - \frac{2}{3}x$, expressão que é substituída na função objetivo que agora depende de só uma variável

$$\tilde{f}(x) = x^{2/3} \left(6 - \frac{2}{3}x\right)^{1/3} \quad (10)$$

Aplicamos a derivada do produto de duas funções e simplificando obtemos

$$\frac{d\tilde{f}}{dx} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{x-6}{x^{1/2} \left(6 - \frac{2}{3}x\right)^{2/3}} \quad (11)$$

cuja raiz é $x = 6$, obtida em forma trivial. Calculando a derivada de segunda ordem temos

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{8}{x^{4/3} \left(6 - \frac{2}{3}x\right)^{5/3}} \quad (12)$$

e substituindo para $x = 6$ resulta $f''(6) = -0.2311204249$, isto é se trata de um máximo local, sendo o valor da produção máxima $f(6,2) = 4.160167647$.

Método de Multiplicadores de Lagrange

O primeiro passo é a construção da função de Lagrange

$$U(x, y, \lambda) = x^{2/3} y^{1/3} + \lambda(10x + 15y - 90) \quad (13)$$

onde λ é denominado o multiplicador de Lagrange. Depois devemos calcular o ponto crítico desta função, e para isso calculamos as derivadas parciais de $U(x,y,\lambda)$:

$$\begin{aligned} U_x &= \frac{2}{3} \frac{y^{1/3}}{x^{1/3}} + 10\lambda \\ U_y &= \frac{1}{3} \frac{x^{2/3}}{y^{2/3}} + 15\lambda \\ U_\lambda &= 10x + 15y - 90 \end{aligned} \quad (14)$$

e igualamos a zero cada derivada parcial

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{3} \frac{y^{1/3}}{x^{1/3}} + 10\lambda &= 0 & (15a) \\ \frac{1}{3} \frac{x^{2/3}}{y^{2/3}} + 15\lambda &= 0 & (15b) \\ 10x + 15y - 90 &= 0 & (15c) \end{aligned} \right\} \text{isolando } -\lambda \text{ obtemos } \frac{2}{30} \frac{y^{1/3}}{x^{1/3}} = \frac{1}{45} \frac{x^{2/3}}{y^{2/3}}$$

assim eliminando λ a relação $x = 3y$ é substituída na última equação

$$10(3y) + 15y - 90 = 0 \Rightarrow y = 2 \text{ e } x = 6 \quad (16)$$

Em sala de aula adicionalmente é dado o enfoque gráfico do método, devido ao fato que o gradiente da função objetivo e o gradiente da função restrição possuem a mesma direção no ponto crítico obtido, o qual é obtido numa curva de nível da função objetivo que resulta tangencial ao gráfico da função de restrição. O mesmo se enfatiza também em outros exemplos bem mais elaborados.



NO LABORATORIO

Se definem apropriadamente as funções objetivo e restrição:

> $f2 := (x,y) \rightarrow x^{2/3} * y^{1/3}$;

$$f2 := (x,y) \rightarrow x^{2/3} y^{1/3}$$

> $g2 := (x,y) \rightarrow 10 * x + 15 * y - 90$;

$$g2 := (x,y) \rightarrow 10 x + 15 y - 90$$

Método Direto

Isolamos a variável y na equação de restrição

> $\text{solve}(g2(x,y)=0,y)$;

$$-\frac{2}{3}x + 6$$

Substitui-se este valor na função objetivo

> `subs(y=%,f2(x,y));`

$$x^{2/3}\left(6 - \frac{2}{3}x\right)^{1/3}$$

Calculamos a derivada

> `factor(diff(%,x));`

$$-\frac{2}{3} \cdot \frac{x-6}{x^{1/2}\left(6 - \frac{2}{3}x\right)^{2/3}}$$

> `solve(%=0,x);`

6

Calculamos a derivada segunda, para determinar se um máximo ou mínimo local.

> `factor(diff(%%,x));`

$$-\frac{8}{x^{4/3}\left(6 - \frac{2}{3}x\right)^{5/3}}$$

> `subs(x=6,%) : evalf(%);`

-0.2311204249

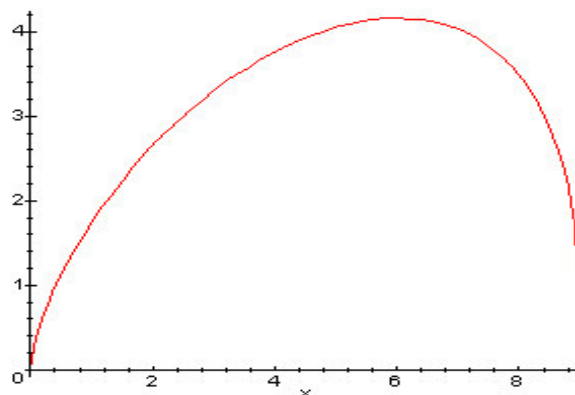
> `evalf(f2(6,2));`

4.160167647

Finalmente neste método mostramos o gráfico da função objetivo após a substituição de y :

> `plot(x^(2/3)*(-2/3*x+6)^(1/3),x=0..9,title=' Função objetivo após eliminar variável y`);`

Função objetivo após eliminar variável y



Como podemos apreciar no gráfico o máximo é atingido em $x = 6$.

Observação : No método direto, o problema de otimizar uma função de duas variáveis com vínculo se reduz a um problema de otimizar uma função de uma variável.

Método de Multiplicadores de Lagrange

Se define a função de Lagrange

> $U := (x, y, \lambda) \rightarrow f_2(x, y) + \lambda g_2(x, y);$

$$U := (x, y, \lambda) \rightarrow f_2(x, y) + \lambda g_2(x, y)$$

Agora se determina o gradiente de $U(x, y, \lambda)$

> $\text{grad}(U(x, y, \lambda), [x, y, \lambda]);$

$$\left[\frac{2}{3} \frac{y^{1/3}}{x^{1/3}} + 10\lambda, \frac{1}{3} \frac{x^{2/3}}{y^{2/3}} + 15\lambda, 10x + 15y - 90 \right]$$

> $\text{convert}(\%, \text{set});$

$$\left\{ \frac{2}{3} \frac{y^{1/3}}{x^{1/3}} + 10\lambda, \frac{1}{3} \frac{x^{2/3}}{y^{2/3}} + 15\lambda, 10x + 15y - 90 \right\}$$

A seguinte instrução resolve o sistema de equações

> $\text{solve}(\%, \{x, y, \lambda\});$

$$\{y = 2, \lambda = 1/15 * \text{RootOf}(1 + 3 * _Z^3, -.6933612744), x = 6\}$$

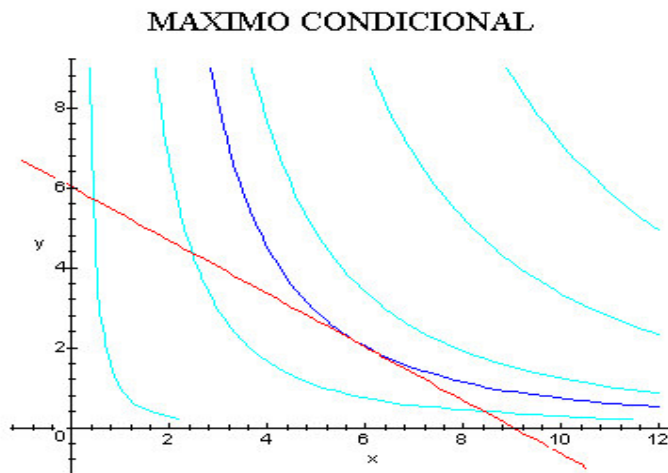
Diagrama de curvas de nível com reta que representa o vínculo :

> $\text{niv} := \text{contourplot}(f_2(x, y), x = -1..12, y = -1..9, \text{contours} = 6, \text{color} = \text{cyan});$

> $\text{plotg} := \text{implicitplot}(g_2(x, y) = 0, x = -1..12, y = -1..9);$

> $\text{plotf} := \text{implicitplot}(f_2(x, y) = f_3(6, 2), x = -1..12, y = -1..9, \text{color} = \text{blue});$

> $\text{display}(\{\text{niv}, \text{plotf}, \text{plotg}\}, \text{title} = \text{`MAXIMO CONDICIONAL`}, \text{scaling} = \text{constrained});$



Observação : No método de multiplicadores de Lagrange utilizamos uma equação de restrição por cada vínculo existente.

Para ilustrar como funcionam ambos métodos para resolver problemas de otimização com duas restrições serão esboçados os respectivos esquemas de solução.

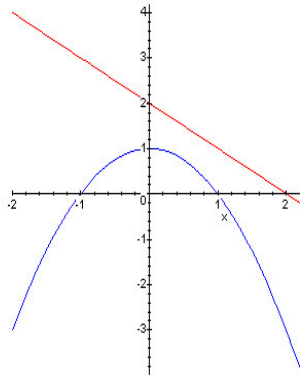
EXEMPLO 3 (de otimização com dois vínculos)

Determinar a distância mínima entre a reta de equação $x + y = 2$ e a parábola $y = 1 - x^2$.



EM SALA DE AULA

Se resolve este problema em forma fácil observando que o ponto da parábola mais próximo será quando a reta tangente ao gráfico da parábola seja paralela à reta dada.



A derivada da função quadrática que define a parábola é

$$\frac{d}{dx}(1 - x^2) = -2x \quad (17)$$

A declividade da reta dada é -1 , ou seja se igualamos os dois valores vamos ter

$$-2x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \quad (18)$$

Assim o ponto da parábola mais próximo da reta é $Q\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

O ponto da reta mais próximo é obtido pela interseção da reta normal à parábola no anterior ponto obtido e a reta dada, i.e.

$$\begin{cases} \text{Reta normal} & y - \frac{3}{4} = 1 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \\ \text{Reta dada} & y + x = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Ponto de interseção } P\left(\frac{7}{8}, \frac{9}{8}\right) \quad (19)$$

A distância entre os pontos P e Q é $PQ = \sqrt{\left(\frac{7}{8} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{8} - \frac{3}{4}\right)^2} = \frac{3}{8}\sqrt{2} \approx 0.5303300858$.

A abordagem do método de multiplicadores de Lagrange envolve uma função que depende de quatro variáveis, o que torna um problema de fácil resolução geométrica num problema de maior complexidade. O problema a ser resolvido é

$$\begin{cases} \min((x - u)^2 + (y - v)^2) \\ x + y - 2 = 0 \\ u^2 + v - 1 = 0 \end{cases} \quad (20)$$

A função de Lagrange se escreve

$$V(x, y, u, v, \lambda, \mu) = (x - u)^2 + (y - v)^2 + \lambda(x + y - 2) + \mu(u^2 + v - 1) \quad (21)$$

Neste caso o trabalho no quadro resulta inviável.



NO LABORATÓRIO

Primeiro, a função objetivo e as de restrição são definidas

> $f3 := (x, y, u, v) \rightarrow (x - u)^2 + (y - v)^2;$

$$f3 := (x, y, u, v) \rightarrow (x - u)^2 + (y - v)^2$$

> $glin := (x, y) \rightarrow x + y - 2;$

$$glin := (x, y) \rightarrow x + y - 2$$

> $gquad := (u, v) \rightarrow u^2 + v - 1;$

$$gquad := (u, v) \rightarrow u^2 + v - 1$$

A função de Lagrange se escreve

> $V := (x, y, u, v, \lambda, \mu) \rightarrow f3(x, y, u, v) + \lambda * glin(x, y) + \mu * gquad(u, v);$

$$V := (x, y, u, v, \lambda, \mu) \rightarrow f3(x, y, u, v) + \lambda * glin(x, y) + \mu * gquad(u, v)$$

> $grad(V(x, y, u, v, \lambda, \mu), [x, y, u, v, \lambda, \mu]);$

$$[2 * x - 2 * u + \lambda, 2 * y - 2 * v + \lambda, -2 * x + 2 * u + 2 * \mu * u, -2 * y + 2 * v + \mu, x + y - 2, u^2 + v - 1]$$

> $convert(\%, set);$

$$\{2 * x - 2 * u + \lambda, 2 * y - 2 * v + \lambda, -2 * x + 2 * u + 2 * \mu * u, -2 * y + 2 * v + \mu, x + y - 2, u^2 + v - 1\}$$

Na busca dos pontos críticos usamos o comando **solve()** :

> $solve(\%, \{x, y, u, v, \lambda, \mu\});$

$$\{u = 1/2, x = 7/8, y = 9/8, v = 3/4, \lambda = -3/4, \mu = 3/4\}, \{u = \text{RootOf}(_Z^2 - _Z + 1), y = 2 - \text{RootOf}(_Z^2 - _Z + 1), v = 2 - \text{RootOf}(_Z^2 - _Z + 1), \lambda = 0, x = \text{RootOf}(_Z^2 - _Z + 1), \mu = 0\}$$

> $evalf(\%);$

$$\{u = .5000000000, x = .8750000000, y = 1.1250000000, v = .7500000000, \lambda = -.7500000000, \mu = .7500000000\}, \{\lambda = 0, \mu = 0, u = .5000000000 - .8660254038 * I, y = 1.5000000000 + .8660254038 * I, v = 1.5000000000 + .8660254038 * I, x = .5000000000 - .8660254038 * I\}$$

Das duas soluções a única solução de valores reais é a primeira.

Sem o auxílio do computador a resolução mediante o método de multiplicadores de Lagrange demandaria muito tempo. Num computador pessoal com processador Pentium III este último problema demandou a MAPLE apenas 2,4 segundos para resolver, e a edição dos comandos demandou maior tempo.

Observação : No laboratório o professor mostra uma apresentação introdutória em Power Point visando recriar o aprendizado em sala de aula, dando maior dinamismo ao trabalho com Maple que resulta interativo. Além disso as folhas de trabalho são publicadas na Internet [3].

4. CONCLUSÕES

O ensino das disciplinas de cálculo muda rapidamente com as novas tecnologias, e o papel do professor da matemática do terceiro nível abrange um conceito mais amplo. A relação professor-aluno do ponto de vista acadêmico não se reduz ao enfoque simplista do fluxo de informação (expositivo ou heurístico), ingressa a uma etapa em que a economia de mercado perturba as estruturas educativas clássicas, a tal ponto que o número de créditos (e horas) das disciplinas da matemática dos cursos da engenharia, administração e outras áreas começa a se reduzir. Outro fato significativo é a evasão nos mesmos cursos da matemática, fenômeno mundial, que constitui um desafio incluso em países altamente desenvolvidos. Em sala de aula a combinação de todas as ferramentas na medida adequada permite ao professor estabelecer qual política escolher. Nas turmas de matemática, mostrar que a formulação lógica dos conceitos pode ser aprofundada empregando as novas tecnologias para resolver problemas que antes eram deixados, e trabalhar com um sistema de computação algébrica permite programar em alguns casos. Nas turmas de engenharia ou administração, mostrar que a matemática pode ter a vivacidade e uma dinâmica interativa com o aluno, que o uso de novas tecnologias renova o conteúdo. A criatividade do professor nesta época de alta concorrência é já um enorme desafio, que permita mostrar que à matemática não se reduz a ser uma ciência que tem se transformado uma pedra angular do desenvolvimento humano, mas que se torna uma linguagem bonita sem atrativo para um mundo pragmático.

No caso específico da otimização de funções de várias variáveis, o uso de sistemas de computação algébrica tem revitalizado este capítulo do cálculo. Nossa experiência tem nos mostrado que podemos reverter dois fenômenos : o alto índice de reprovação e o interesse dos alunos. Na verdade o processo é lento pois a adequação do aluno e dos professores às novas tecnologias ainda sofre alguns déficits (“ e um trabalho a mais ”, “o uso do computador cria novos problemas ”, “para que, se eu tenho ensinado 20 anos sem problemas ”). Só que o técnico e o profissional do futuro deve se preparar desde hoje.

REFERÊNCIAS

1. KRANZ, Steven G., *How to Teach Mathematics*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, USA, (1999).
2. MCCALLUM, William G., HUGHES-HALLETT, Deborah, GLEASON, Andrew M., *Cálculo de Várias Variáveis*, Editora Edgard Blücher Ltda. São Paulo, (1997).
3. PANTA PAZOS, Rubén, *Cálculo Diferencial e Integral C*, página Web da PUCRS www.mat.pucrs.br/~rpp/